Cursul 7 Oscilaţii: Mişcarea oscilatorie. Oscilaţii armonice

7.1. Mişcarea oscilatorie

În natură şi tehnică se întâlnesc procese repetabile în timp care stau la baza oscilaţiilor de diferite feluri.

Fig. 1 Exemple de mişcări periodice.

Caracteristici ale mişcării oscilatorii:

- Existenta unei poziţii de echilibru
- Mişcarea se efectuează în ambele sensuri, în jurul poziţiei de echilibru.
- Traiectoria mişcării are două extreme.
- In aceste poziţii extreme viteza corpurilor este nulă.

*Definiţie: Un corp solid sau lichid care se mişcă în ambele sensuri pe aceeaşi traiectorie, execută o mişcare de **oscilaţie mecanică**.*

*Definiţie: Mişcarea unui corp care se repetă la intervale egale de timp şi se execută simetric faţă de poziţia de echilibru se numeşte **mişcare oscilatorie periodică**.*

*Definiţie: Sistemele care efectuează mişcările descrise mai sus se numesc **oscilatori**.*

7.2. Factori care determina mişcarea oscilatorie

Energia iniţială suplimentară, care este necesară pentru scoaterea corpului din poziţia de echilibru reprezintă primul factor care determină mişcarea de oscilaţie. Forţa care

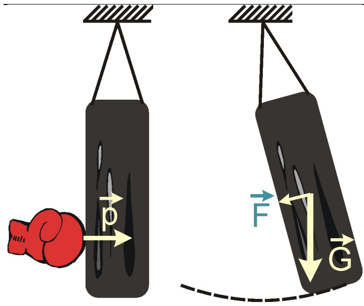

Fig. 5. 2 Impulsul inițial și apoi forța de revenire conduc la apariția unei mișcări oscilatorii.

acţionează asupra unui corp şi este mereu îndreptata spre poziţia de echilibru se numeşte forţa elastică de revenire şi este al doilea factor care determina o mişcare oscilatorie.

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{x}\,, \tag{7.1}$$

unde k este o constantă care caracterizează sistemul oscilator; iar x este depărtarea corpului faţă de poziţia de echilibru şi se numeşte elongaţie. Dacă asupra corpului care execută o mişcare de oscilaţie acţionează numai o forţa de tip elastic atunci această mişcare ideală este numită armonică.

7.3. Ecuaţia mişcării oscilatorii armonice

Energia potenţială este minimă în poziţia de echilibru. Dacă notam cu $W_p(x)$ energia potenţiala atunci aceasta se poate dezvolta în serie Taylor în jurul poziţiei de echilibru:

$$W_p(x) = W_p(0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{dW_p(x)}{dx}\right)\bigg|_{x=0} \cdot x + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2W_p(x)}{dx^2}\right)\bigg|_{x=0} \cdot x^2 + \ldots \tag{7.2}$$

Consideram oscilaţii mici în jurul poziţiei de echilibru, x = 0. Derivata I-a este zero în această poziţie de echilibru iar energia potenţială în x = 0 este o constantă pe care o putem considera zero, $W_p = 0$:

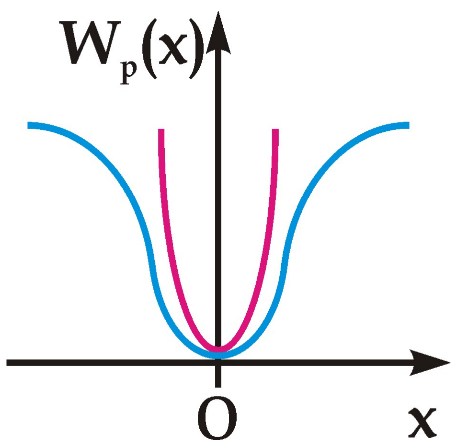

Fig. 3 Energia potențială poate fi în general o curbă oarecare aproximată în jurul lui x = 0 de o parabolă.

$$\left(\frac{dW_p(x)}{dx}\right)\bigg|_{x=0} = 0\,, \tag{7.3}$$

$$W_p(0) = \text{const} = 0\,, \tag{7.4}$$

expresia energiei potenţiale devine:

$$W_p(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2W_p(x)}{dx^2}\right)\bigg|_{x=0} \cdot x^2 = \frac{1}{2} k \cdot x^2\,, \tag{7.5}$$

unde k este considerată constanta elastică. Dacă câmpul este conservativ atunci Forţa derivă dintr-un potenţial (energia potenţială):

$$F = -\frac{dW_p(x)}{dx} = -k \cdot x\,, \tag{7.6}$$

care este o forţă de tip elastic. Condiţia a II–a pentru producerea unei mişcării oscilatorii.

Dacă ţinem cont de legea a doua a lui Newton se poate obţine ecuaţia de mişcare:

$$F = m \cdot a = m\frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x\,, \tag{7.7}$$

care prin împărţirea cu masa corpului, ne dă:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x = -\omega_0^2 \cdot x\,, \tag{7.8}$$

unde s-a notat:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \tag{7.9}$$

Se face următoarea convenţie în notaţii:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \text{şi} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}\,, \tag{7.10}$$

atunci ecuaţia de mişcare devine:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0\,, \tag{7.11}$$

care este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul doi cu coeficienţi constanţi. Soluţia generală este de forma:

$$x(t) = C_1 e^{i \cdot \omega_0 \cdot t} + C_2 e^{-i \cdot \omega_0 \cdot t}\,, \tag{7.12}$$

sau sub forma:

$$x(t) = (C_1 + C_2) cos(\omega_0 \cdot t) + (C_1 - C_2) i\, sin(\omega_0 \cdot t), \tag{7.13}$$

unde C_1 şi C_2 sunt două constante de integrare. Putem introduce alte două constante A (amplitudinea) şi φ (faza). Atunci ecuaţia de mişcare se poate scrie ca:

$$x(t) = A\, sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0), \tag{7.14}$$

care este ecuaţia mişcării oscilatorii armonice.

$$\begin{aligned} x(t) = {} & A\, sin(\omega_0 \cdot t) \cdot cos(\varphi_0) \\ & + A\, cos(\omega_0 \cdot t) \cdot sin(\varphi_0) \end{aligned}, \tag{7.15}$$

de unde prin identificarea coeficienţilor din ecuaţia (5.13) cu ecuaţia (5.15) obţinem:

$$\begin{cases} A\, cos(\varphi_0) = (C_1 - C_2) i \\ A\, sin(\varphi_0) = (C_1 + C_2) \end{cases}, \tag{7.16}$$

de unde:

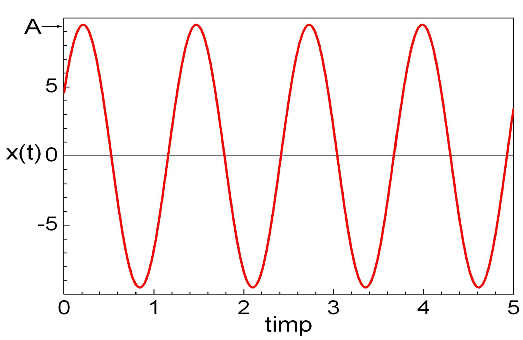

Fig. 5. 4 Reprezentarea grafică a elongaţiei din ecuaţia 5.14 în funcţie de timp.

$$\begin{cases} A = 2\sqrt{C_1 C_2} \\ tg(\varphi_0) = \dfrac{i(C_1 + C_2)}{(C_2 - C_1)} \cdot \end{cases} \tag{7.17}$$

7.4. Mărimii caracteristice mişcării de oscilaţie

Mişcarea de oscilaţie este caracterizată de depărtarea momentană sau elongaţie x(t).

Definiţie: ***Elongaţia*** *x indică depărtarea corpului la un moment dat fată de poziţia de echilibru.*

Definiţie: Deviaţia maximă a corpului faţă de poziţia de echilibru se numeşte ***amplitudine****.*

Amplitudinea, ***A*** este întotdeauna pozitiva.

Faza mişcării $\varphi(t) = \omega_0 \cdot t + \varphi_0$ – indică starea şi sensul mişcării la un moment dat. **Faza iniţială** este φ_0. Iar ω_0 se numeşte **pulsaţie** şi are dimensiunea unei viteze unghiulare.

Definiţie: Mărimea ***T*** *care caracterizează periodicitatea mişcării de oscilaţie se numeşte* ***perioadă*** *a oscilaţiei.*

Definiţie: ***Perioada de oscilaţie, T*** *este timpul necesar pentru efectuarea unei oscilaţii complete.*

Definiţie: ***Frecvenţa*** *de oscilaţie* ν *reprezintă numărul de oscilaţii efectuate în unitatea de timp.*

$$\omega_0 = 2\pi \cdot \nu_0 = 2\pi \cdot \frac{1}{T_0}, \tag{7.18}$$

deci între frecvenţă şi perioadă exista relaţia:

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0}, \tag{7.19}$$

unitatea de măsură pentru frecvenţă este:

$$[\nu_0] = \frac{1}{[T_0]} = \frac{1}{s} = Hz, \tag{7.20}$$

şi dacă ţinem cont şi de ecuaţia (7.9) obţinem perioada de oscilaţie:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{7.21}$$

7.5. Viteza şi acceleraţia în mişcarea oscilatorie armonică

Viteza unui punct material aflat în mişcare oscilatorie este dată de:

$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega_0 \, cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0). \tag{7.22}$$

Acceleraţia unui punct material aflat în mişcare oscilatorie este dată de:

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega_0^2 \, sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0), \tag{7.23}$$

sau dacă introducem expresia elongaţiei obţinem:

$$a(t) = -\omega_0^2 \cdot x(t). \tag{7.24}$$

7.6. Energia oscilatorului armonic

Să considerăm un oscilator ideal. În acest caz energia totală se conservă. Ea este compusă din energie cinetică şi energie potenţială de deformare.

$$W = W_c + W_p, \tag{7.25}$$

unde:

Energia potenţială este:

$$W_p(t) = k\frac{x(t)^2}{2} = \frac{k \cdot A^2}{2} sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2}{2} sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{7.26}$$

Energia cinetică este:

$$W_c(t) = m\frac{v(t)^2}{2} = \frac{m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2}{2} cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{k \cdot A^2}{2} cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{7.27}$$

Energia totală dată de ecuaţia (5.25) devine:

$$W = W_c + W_p = \frac{k \cdot A^2}{2} = \frac{m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2}{2}. \tag{7.28}$$